数理解析研究所講究録
第1723巻 2011年 115-124

渦層，佐藤超関数，擬微分作用素
Vortex Sheets, Hyperfunctions, Pseudodifferentail Operators

打越 敬祐 (Keisuke UCHIKOSHI)*

概要

3次元渦層について，佐藤超関数的な考察を行う．渦層の運動を記述するBirkoff-Rott方程式を，擬微分作用素に関連づけて考察する．ただし未完成な内容を含む．

§1. Introduction

渦層とは，2次元または3次元の流体が，時間変化する超局面 $\Gamma(t)$ (これを界面集合と呼ぶ) に沿って不連続な流れ方をしている状態である．

以下3次元渦層を説明する．粘性のない縮まない3次元流体が界面集合 $\Gamma(t)$ 以外では渦を持たないとする．座標変数を $(t,x)=(t,x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$，流速を $u(t,x)=(u_1,u_2,u_3)$ とすれば仮定は

$$\operatorname{div}\vec{u}=0, \qquad x\in\mathbf{R}^3,$$
$$\operatorname{rot}\vec{u}=0, \qquad x\in\mathbf{R}^3\setminus\Gamma(t)$$

となる．

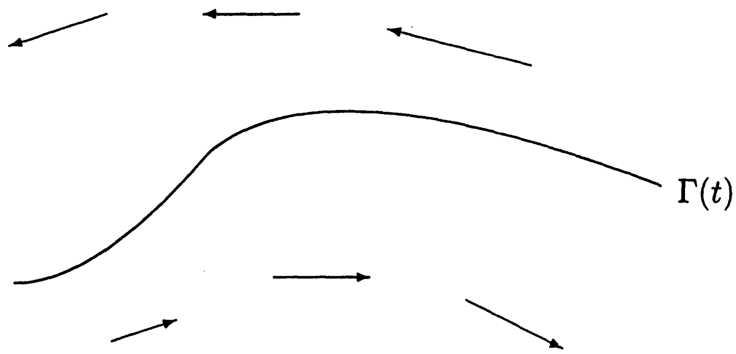
$$\Gamma(t)=\{(t,x);\ x_3=f(t,x_1,x_2)\},$$
$$W^{\pm}(t)=\{(t,x);\ \pm x_3>\pm f(t,x_1,x_2)\}$$

とすると，各 $u_j(t,x)$ は $W^{\pm}(t)$ において x に対して調和関数になる．界面集合を表示する関数

$f(t,x_1,x_2)$ が解析的であるという前提なら，$W^{\pm}(t)$ 上の調和関数 $u_j(t,x)$ に対して

$$u_j(t,x_1,x_2,f(t,x_1,x_2)\pm 0)=\lim_{\varepsilon\to+0}u_j(t,x_1,x_2,f(t,x_1,x_2)\pm\varepsilon)$$

2000 Mathematics Subject Classification(s): 76B47, 35S05.
キーワード: 渦層，佐藤超関数，擬微分作用素，Birkoff-Rott 方程式
*230-8686 横須賀市走水 1-10-20 防衛大学校数学教育室



という極限概念を定式化することが可能であり，この極限の全体はtをパラメータとして2次元佐藤超関数に一致する ([5])．今の場合は$f(t,x_1,x_2)$が解析的であると仮定しているわけではないが，形式的に$u_j(t,x_1,x_2,f(t,x_1,x_2)\pm 0)$という極限を考える．また$u_j(t,x_1,x_2,f(t,x_1,x_2)+0)$と$u_j(t,x_1,x_2,f(t,x_1,x_2)-0)$がそれぞれ佐藤超関数に対応するが，ジャンプ関数

$$J(t,x_1,x_2)=u(t,x_1,x_2,f(t,x_1,x_2)+0)-u(t,x_1,x_2,f(t,x_1,x_2)-0)$$

を考える．

流速が界面集合で不連続になる場合を考察するので，$u(t,x)=(u_1,u_2,u_3)$の値は界面集合上では必ずしも定義されない．しかし便宜上，界面集合では中点修正により流速の値を定めておく．すなわち，

$$\begin{aligned}U(t,x_1,x_2)=&u(t,t,x_1,x_2,f(t,x_1,x_2))\\=&(u(t,x_1,x_2,f(t,x_1,x_2)+0)+u(t,x_1,x_2,f(t,x_1,x_2)-0))/2\end{aligned}$$

とする．

Remark. 今井功 [2] は，佐藤超関数と渦層の間のこのような関連に強い関心を示し，「佐藤教授の理論は驚嘆すべきものである」と述べている．野呂祐樹 [3] は今井功の理論を再整理した．流体論では上のジャンプ関数$J(t,x_1,x_2)$と平均流速$U(t,x_1,x_2)$の間の関係が基礎になるが，これについても今井功の研究に基づいて，野呂祐樹が再整理した．なお今井功は日本の物理学者で，文化勲章受章者.「佐藤の超関数」が流体中の渦層に他ならないことを見出し，そのイメージをもとに超関数の理論を体系的にまとめ「応用超関数論」として出版した (ウィキペディアより).

次の定理は2次元流体の場合に今井 [2] が漠然と暗示し，野呂 [3] が定式化したものである．冒頭,「縮まない 3 次元流体が界面集合以外では渦を持たないとする」と仮定したが．条件を弱くして「界面集合以外では縮まず渦を持たない3次元流体」について次の定理が成立する．

Theorem 1.1. $[0,T]\times\mathbf{R}^3$ 全体で $\mathrm{rot}\,u$, $\mathrm{div}\,u$ を合理的に定義することができて，界面集合の法線ベクトル $n=(-f_{x_1},-f_{x_2},1)$ に対して

$$\mathrm{rot}\,u=-\delta(x_3-f(t,x_1,x_2))(J\times n) \tag{1.1}$$

$$\mathrm{div}\,u=\delta(x_3-f(t,x_1,x_2))(J\cdot n) \tag{1.2}$$

となる．

証明．簡単のため，$[0,T]\times\mathbf{R}^3$ 全体で x について渦と圧縮のない $u^+(t,x)$, $u^-(t,x)$ があり，

$$u(t,x)=H(x_3-f(t,x_1,x_2))u^+(t,x)+H(-x_3+f(t,x_1,x_2))u^-(t,x) \tag{1.3}$$

であるとする．ただし $H(x_3)$ はヘビサイド関数である．このとき，

$$\begin{aligned}
\partial_{x_1}u_1=&H(x_3-f(t,x_1,x_2))u^+_{1,x_1}(t,x)\\
&-\delta(x_3-f(t,x_1,x_2))f_{x_1}(t,x_1,x_2)u^+_1(t,x)\\
&+H(-x_3+f(t,x_1,x_2))u^-_{1,x_1}(t,x)\\
&+\delta(x_3-f(t,x_1,x_2))f_{x_1}(t,x_1,x_2)u^-_1(t,x),\\
\partial_{x_2}u_2=&H(x_3-f(t,x_1,x_2))u^+_{2,x_2}(t,x)\\
&-\delta(x_3-f(t,x_1,x_2))f_{x_2}(t,x_1,x_2)u^+_2(t,x)\\
&+H(-x_3+f(t,x_1,x_2))u^-_{2,x_2}(t,x)\\
&+\delta(x_3-f(t,x_1,x_2))f_{x_2}(t,x_1,x_2)u^-_2(t,x),\\
\partial_{x_3}u_3=&H(x_3-f(t,x_1,x_2))u^+_{3,x_3}(t,x)\\
&+\delta(x_3-f(t,x_1,x_2))u^+_3(t,x)\\
&+H(-x_3+f(t,x_1,x_2))u^-_{3,x_3}(t,x)\\
&-\delta(x_3-f(t,x_1,x_2))u^-_3(t,x)
\end{aligned}$$

となり，仮定より $\mathrm{div}\,u^\pm=u^\pm_{1,x_1}+u^\pm_{2,x_2}+u^\pm_{3,x_3}=0$ だから

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\,u=&\delta(x_3-f(t,x_1,x_2))\{-f_{x_1}(t,x_1,x_2)(u^+_1(t,x_1,x_2,f)-u^-_1(t,x_1,x_2,f))\\
&-f_{x_2}(t,x_1,x_2)(u^+_2(t,x_1,x_2,f)-u^-_2(t,x_1,x_2,f))\\
&+(u^+_3(t,x_1,x_2,f)-u^-_3(t,x_1,x_2,f))\}\\
=&\delta(x_3-f(t,x_1,x_2))(-f_{x_1},-f_{x_2},1)\cdot(u(t,x_1,x_2,f+0)-u(t,x_1,x_2,f-0))
\end{aligned}$$

となる．(1.3) を仮定しないとき，$u(t,x_1,x_2,f(t,x_1,x_2)+0)-u(t,x_1,x_2,f(t,x_1,x_2)-0)$ を超関数論の意味で定式化して同じ結論を得る．また $\mathrm{rot}\,u$ の場合も同様である．Q.E.D.

したがって，佐藤超関数の定義関数は流速を表し，佐藤超関数は界面上の渦や圧縮を表す．

冒頭の「縮まない3次元流体が界面集合以外では渦を持たないとする」という条件に戻ると (1.2) で計算した $\operatorname{div} u$ が至るところ消滅するので，(1.2) より $u(t,x_1,x_2,f(t,x_1,x_2)+0)-u(t,x_1,x_2,f(t,x_1,x_2)-0)$ は界面集合上の各点で接平面方向のベクトルになる．一方 $\Omega = J\times n$ は界面集合上の渦の向きと強さを表し，

$$\Omega = (\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3) = (\Omega_1,\Omega_2, f_{x_1}\Omega_1 + f_{x_2}\Omega_2)$$

となる．そこで渦層は3つの関数 $f(t,x_1,x_2)$, $\Omega_1(t,x_1,x_2)$, $\Omega_2(t,x_1,x_2)$ によって記述されることになる．

§2. Birkoff-Rott 方程式

Proposition 2.1. これら3つの関数は Birkoff-Rott の方程式を満たす:

$$f_t + U_1 f_{x_1} + U_2 f_{x_2} = U_3, \tag{2.1}$$

$$\Omega_{1t} + (U_1\Omega_1)_{x_1} + (U_2\Omega_1)_{x_2} = \Omega_1 U_{1,x_1} + \Omega_2 U_{1,x_2}, \tag{2.2}$$

$$\Omega_{2t} + (U_1\Omega_2)_{x_1} + (U_2\Omega_2)_{x_2} = \Omega_1 U_{2,x_1} + \Omega_2 U_{2,x_2}. \tag{2.3}$$

証明．簡単のため，2次元で考える．座標変数を $(t,x)=(t,x_2,x_3)\in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$，流速を $u(t,x)=(u_2,u_3)$ とする．界面集合は $\{x_3 = f(t,x_2)\}$ となり，ローテーションは $\operatorname{rot} u = (u_{3,x_2} - u_{2,x_3},0,0) = -\delta(x_3 - f(t,x_2))(\Omega_1(t,x_2),0,0)$ となる．完全流体を考えているので，$u(t,x)$ はオイラー方程式を満たす．そこから導かれる結論として，流速で移動する動点 $P(t,x_2(t),x_3(t))$ におけるローテーションは時間変化しない (すなわち2次元完全流体において各粒子の自転運動は時間変化しない):

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}\Big(\operatorname{rot} u(t,x_2(t),x_3(t))\Big) = \frac{d}{dt}\Big(\delta(x_3(t)-f(t,x_2(t)))\Omega_1(t,x_2(t))\Big)\\
&= L(\delta(x_3 - f(t,x_2))\Omega_1(t,x_2)).
\end{aligned}$$

ただし $L = \partial_t + u_2\partial_{x_2} + u_3\partial_{x_3}$ とする．そこで

$$\begin{aligned}
0 &= \delta'(x_3-f)(-f_t - u_2 f_{x_2} + u_3)\Omega_1 + \delta(x_3 - f)(\Omega_{1t} + u_2\Omega_{1,x_2})]\\
&= \delta'(x_3-f)[(-f_t - u_2 f_{x_2} + u_3)\Omega_1]_{\Gamma(t)}\\
&\quad + \delta(x_3-f)[-(-u_2 f_{x_2} + u_3)_{x_3}\Omega_1 + (\Omega_{1t} + u_2\Omega_{1,x_2})]_{\Gamma(t)}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

となる．ここで，(1.2) より，$\operatorname{div} u = \delta(x_3 - f(t,x_1,x_2))(J\cdot n) = 0$ となり，

$$\begin{aligned}
&-f_{x_2}(t,x_2)u_2(t,x_2,f(t,x_2)+0) + u_3(t,x_2,f(t,x_2)+0)\\
=&-f_{x_2}(t,x_2)u_2(t,x_2,f(t,x_2)-0) + u_3(t,x_2,f(t,x_2)-0)\\
=&-f_{x_2}(t,x_2)U_2(t,x_2) + U_3(t,x_2)
\end{aligned}$$

だから

$$[-u_2 f_{x_2} + u_3]_{\Gamma(t)} = -U_2 f_{x_2} + U_3. \tag{2.5}$$

またすべての点で $\operatorname{div} u = u_{2,x_2} + u_{3,x_3} = 0$ に注意して

$$[-(-u_2 f_{x_2} + u_3)_{x_3}]_{\Gamma(t)} = [u_{2,x_3} f_{x_2} + u_{2,x_2}]_{\Gamma(t)} = \partial_{x_2} u_2(t, x_2, f(t, x_2))$$

となる．これについても中点修正を考えて

$$[-(-u_2 f_{x_2} + u_3)_{x_3}]_{\Gamma(t)} = U_{2,x_2} \tag{2.6}$$

とする．そこで (2.4), (2.5), (2.6) より

$$0 = \delta'(x_3 - f)(-f_t - U_2 f_{x_2} + U_3)\Omega_1 + \delta(x_3 - f)(U_{2,x_2}\Omega_1 + \Omega_{1t} + U_2 \Omega_{1,x_2})$$

これは

$$-f_t - U_2 f_{x_2} + U_3 = 0, \quad \Omega_{1t} + (U_2 \Omega_1)_{x_2} = 0$$

を意味する (2 次元 Birkoff-Rott 方程式)．Q.E.D.

なお，超関数 (すなわち渦の分布) $\Omega(t, x_1, x_2)$ を与えたとき，対応する定義関数 (すなわち流速) $u(t, x_1, x_2, x_3)$ は一意的には定まらない．しかし，無限遠で流体が静止していると考え，$x_3 \to \pm\infty$ のとき $u \to 0$ と仮定すれば，定義関数 $u(t, x_1, x_2, x_3)$ を一意的に定める事ができる (これを標準定義関数という)．このように考えると，$f(t, x_1 x_2)$, $\Omega(t, x_1, x_2)$ が与えられたとき，Biot-Savart の法則によれば流速 $u(t, x_1, x_2, x_3)$ は

$$u(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{-1}{4\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \frac{(x'_1, x'_2, X) \times \Omega(t, x_1 - x'_1, x_2 - x'_2)}{((x'_1)^2 + (x'_2)^2 + X^2)^{3/2}} dx'_1 dx'_2$$

となる．ただし変数 $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ と積分変数 $(x'_1, x'_2) \in \mathbf{R}^2$ に対して $X = x_3 - f(t, x_1 - x'_1, x_2 - x'_2)$ とした．とくに界面集合上で中点修正した速度 $U(t, x_1, x_2)$ は

$$U(t, x_1, x_2) = \frac{-1}{4\pi} ⨍_{\mathbf{R}^2} \frac{(x'_1, x'_2, X') \times \Omega(t, x_1 - x'_1, x_2 - x'_2)}{((x'_1)^2 + (x'_2)^2 + (X')^2)^{3/2}} dx'_1 dx'_2 \tag{2.7}$$

で与えられる．ただし $X' = f(t, x_1, x_2) - f(t, x_1 - x'_1, x_2 - x'_2)$ とし，主値積分 $⨍_{\mathbf{R}^2} = \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to +0 \\ R \to +\infty}} \int_{\varepsilon \le |x'| \le R}$ を考える．

Remark. 先に述べた通り，渦層問題では $u(t, x_1, x_2, f \pm 0)$ から導かれるジャンプ関数 $J(t, x_1 x_2)$ (または $\Omega(t, x_1 x_2)$) と平均流速 $U(t, x_1 x_2)$ との関係が基礎になり，それが Birkoff-Rott 方程式である．渦層の問題の技術的な難しさはこの主値積分の取り扱いに起因する．簡単な場合を考えてみると，$\Omega_3 = f_{x_1}\Omega_1 + f_{x_2}\Omega_2$ だから，もし $f = 0$ なら $\Omega_3 = 0$ となり，この場合は

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Omega_1(t, x_1 - x'_1, x_2 - x'_2) \\ \Omega_2(t, x_1 - x'_1, x_2 - x'_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x'_1 \Omega_2(t, x_1 - x'_1, x_2 - x'_2) - x'_2 \Omega_1(t, x_1 - x'_1, x_2 - x'_2) \end{pmatrix}$$

だから，(2.7) は

$$U_1(t,x_1,x_2)=U_2(t,x_1,x_2)=0,$$
$$U_3(t,x_1,x_2)=\frac{-1}{4\pi}\int_{\mathbf{R}^2}\frac{x_1'\Omega_2(t,x_1-x_1')-x_2'\Omega_1(t,x_2-x_2')}{((x_1')^2+(x_2')^2)^{3/2}}dx_1'dx_2'$$

となる．最後の式は Riesz 変換であり，

$$U_3(t,x_1,x_2)=\frac{-1}{2}(-\Delta)^{-1/2}(\partial_{x_1}\Omega_2-\partial_{x_2}\Omega_1)$$

となる．

§ 3. Calderón-Zygumund の特異積分作用素

つぎに Birkoff-Rott 方程式に対して初期値問題を考えたとき，それが適切であるかどうかを問題とする．ただしこの節の内容は未完成なものであり，議論の厳密性もない．以下，$x=(x_1,x_2)$，$x'=(x_1',x_2')$ とし，$\Delta=\partial_{x_1}^2+\partial_{x_2}^2$ とする．また，次のような関数空間で考察する．

$$\mathcal{F}^p=\{h(t,x)\in C^0([0,T]\times\mathbf{R}^2);\ ||h||_p<\infty,$$
$$h(t,x_1+2\pi,x_2)=h(t,x_1,x_2+2\pi)=h(t,x)\},$$

$$||h||_{\mathcal{F}^p}=\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbf{R}^2}|h(t,x)|S+\sup_{(t,x^1,x^2)\in\Delta([0,T]\times\mathbf{R}^2)}\frac{|h(t,x^1)-h(t,x^2)|}{|x^1-x^2|^p},$$

$$\Delta([0,T]\times\mathbf{R}^2)=\{(t,x^1,x^2)\in[0,T]\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2;\ x^1\neq x^2\},$$

$$\mathcal{F}^{p+j}=\{h(t,x)\in\mathcal{F}^p;\ h(t,x)\ \text{は}\ x\ \text{について}\ j\ \text{回微分可能であって}$$
$$0\le k\le j\ \text{に対して}\partial_x^k h\in\mathcal{F}^p(\omega)\ \text{を満たす}\},$$

$$\mathcal{F}_0^{p+j}=\{h(t,x)\in\mathcal{F}^{p+j};\ \int_{-\pi}^{\pi}h(t,x)dx=0\},$$

$$||h||_{\mathcal{F}^{p+j}}=\sum_{0\le k\le j}||\partial_x^k h||_{\mathcal{F}^p}.$$

周期関数を考える理由は，それが考えやすいからであるが，雲や波など，自然現象に現れる渦層は周期的なパターンを持つことが多いからでもある．ウィキペディアの「ケルビン・ヘルムホルツ不安定性」の項目にもそのような写真が掲載されている．

さきほどの (2.7) に現れた主値積分は，もし f_x が既知の関数であれば $((x_1')^2+(x_2')^2+(X')^2)^{-3/2}(x_1',x_2',X')$ を積分核と考え，$\Omega(t,x_1-x_1',x_2-x_2')$ を operand と考えることもできる．そのとき積分核は $x'=0$ に 2 次の特異点を持つので 0 階の擬微分作用素と見ることができる．通常，擬微分作用素を研究するときは，Hörmander にせよ，佐藤・柏原・河合にせよシンボルの理論を援用することが多い．しかし (2.7) を擬微分作用素と見る場合は，積分核の中にも未知関数が混入して，非線形作用素の形になっているので，通常のシンボ

ルの理論は適用しづらい．そこで渦層の研究では，積分核を直接調べる Calderón-Zygumund の理論に沿って考えることが多い．とくに基礎的な作用素は

$$A_0h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2} \frac{h(t,x)-h(t,x-x')}{|x'|^3}dx',$$
$$A_kh(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2} \frac{x'_k h(t,x)}{|x'|^3}dx', \qquad k=1,2$$

である．A_0 は -3 次斉次な積分核 $|x'|^{-3}$ をもつ 1 階の擬微分作用素であり，$A_0\colon \mathcal{F}^{p+j+1}(\omega) \to \mathcal{F}^{p+j}(\omega)$ は有界である．$A_0 = (-\Delta)^{1/2}$ となることが知られている．$k=1,2$ について A_k は -2 次斉次な積分核 $|x'|^{-3}x_k$ をもつ 0 階の擬微分作用素であり，$A_k\colon \mathcal{F}^{p+j}(\omega) \to \mathcal{F}^{p+j}(\omega)$ は有界である．$A_k = -(-\Delta)^{-1/2}\partial_{x_k}$ となることが知られていて，先に述べたとおりこれらは Riesz 変換と呼ばれる．また A_0 : $\mathcal{F}_0^{p+j+1}(\omega) \longrightarrow \mathcal{F}_0^{p+j}(\omega)$ は同形である．

Remark. 前節の *Remark* で述べたように，もし $f=0$ なら $U(t,x)$ は Ω_1, Ω_2 の Riesz 変換だから

$$\mathcal{F}^{p+j}(\omega)^2 \ni (\Omega_1,\Omega_2) \longmapsto (U_1,U_2,U_3) \in \mathcal{F}^{p+j}(\omega)^3$$

は有界である．一般に

$$\mathcal{F}_{\mathbf{R}}^{p+j}(\omega) \times \mathcal{F}^{p+j+1}(\omega)^2 \ni (\Delta f,\Omega_1,\Omega_2) \longmapsto (U_1,U_2,U_3) \in \mathcal{F}^{p+j+1}(\omega)^3$$

は非線形有界作用素である．

さきに Birkoff-Rott 方程式は $f(t,x)$, $\Omega_1(t,x)$, $\Omega_2(t,x))$ に対する関係式であると書いたが，通常は $f(t,x)$ のかわりに $f_0(t,x) = \Delta f(t,x)$ を未知関数と考える．たとえば (2.7) の中で $f(t,x_1,x_2)$ は

$$\begin{aligned} f(t,x)-f(t,x-x') &= \int_{-x'}^{0}\{f_{x_1}(t,x+x'')+f_{x_2}(t,x+x'')\}dx'' \\ &= -\int_{-x'}^{0}(A_1+A_2)A_0^{-1}f_0(t,x+x'')dx'' \end{aligned}$$

という形で現れる．したがってこれは $A_0f(t,x)$ の Riesz 変換を調べればよいことになる．以下次の通り仮定する：

$$\text{(3.1)} \qquad \begin{aligned} &f_0 \in \mathcal{F}^{p+1}(\omega),\ \Omega_1 \in \mathcal{F}^{p+2}(\omega),\ \Omega_2 \in \mathcal{F}^{p+2}(\omega) \\ &\|f_0\|_{\mathcal{F}^{p+1}},\ \|\Omega_1 - 1\|_{\mathcal{F}^{p+2}(\omega)},\ \|\Omega_2\|_{\mathcal{F}^{p+2}(\omega)} << 1. \end{aligned}$$

(2.1) の両辺に Δ をかけて

$$\Delta f_t + U_1\Delta f_{x_1} + 2\nabla U_1\cdot\nabla f_{x_1} + f_{x_1}\Delta U_1 + U_2\Delta f_{x_1} + 2\nabla U_2\cdot\nabla f_{x_2} + f_{x_2}\Delta U_2 = \Delta U_3,$$

i.e.

$$\begin{aligned} &f_{0,t} + U_1f_{0,x_1} - 2\nabla U_1\cdot\nabla A_1A_0^{-1}f_0 - A_1A_0^{-1}f_0\Delta U_1 \\ &\qquad + U_2f_{0,x_2} - 2\nabla U_2\cdot\nabla A_2A_0^{-1}f_0 - A_2A_0^{-1}f_0\Delta U_2 = \Delta U_3. \end{aligned}$$

また $\partial_{x_1}(2.2)+\partial_{x_2}(2.3)$ より,

$$
\begin{aligned}
(\Omega_{1,x_1}+\Omega_{2,x_2})_t+U_1(\Omega_{1,x_1}+\Omega_{2,x_2})_{x_1}+U_2(\Omega_{1,x_1}+\Omega_{2,x_2})_{x_2}&\\
=-(U_{1,x_1}+U_{2,x_2})(\Omega_{1,x_1}+\Omega_{2,x_2})&
\end{aligned}
$$

となり, $\partial_{x_1}(2.3)-\partial x_2(2.2)$ より,

$$
\begin{aligned}
(\Omega_{2,x_1}-\Omega_{1,x_2})_t+U_1(\Omega_{2,x_1}-\Omega_{1,x_2})_{x_1}+U_2(\Omega_{2,x_1}-\Omega_{1,x_2})_{x_2}+\Omega_1\Delta U_2-\Omega_2\Delta U_1&\\
=-(U_{1,x_2}+U_{2,x_1})(\Omega_{1,x_1}+\Omega_{2,x_2})-2U_{2,x_2}\Omega_{1,x_2}+2U_{1,x_1}\Omega_{2,x_1}&
\end{aligned}
$$

となる. あらためて $f_0=\Delta f$, $f_1=\Omega_{1,x_1}+\Omega_{2,x_2}$, $1.f_2=\Omega_{2,x_1}+\Omega_{1,x_2}$ として上の式を書きなおすと,

$$
\begin{aligned}
&(3.2) && f_{0,t}+U_1f_{0,x_1}+U_2f_{0,x_2}=2\nabla U_1\cdot\nabla A_1A_0^{-1}f_0+A_1A_0^{-1}f_0\Delta U_1\\
& && \qquad\qquad +2\nabla U_2\cdot\nabla A_2A_0^{-1}f_0+A_2A_0^{-1}f_0\Delta U_2+\Delta U_3,\\
&(3.3) && f_{1,t}+U_1f_{1,x_1}+U_2f_{1,x_2}=-(U_{1,x_1}+U_{2,x_2})f_1\\
&(3.4) && f_{2,t}+U_1f_{2,x_1}+U_2f_{2,x_2}=-\Omega_1\Delta U_2-\Omega_2\Delta U_1-(U_{1,x_2}+U_{2,x_1})f_1\\
& && \qquad\qquad -2U_{2,x_2}\Omega_{1,x_2}+2U_{1,x_1}\Omega_{2,x_1}
\end{aligned}
$$

となる.

ここから (3.2),(3.3),(3.4) を近似することを考えるが, 近似の意味など厳密な議論はできていない. 仮定 (3.1) より

$$
\begin{aligned}
&f_0,f_1,f_2\in\mathcal{F}^{p+1}(\omega)\\
&||U_1||_{\mathcal{F}^{p+1}(\omega)},||U_2||_{\mathcal{F}^{p+1}(\omega)},||U_3||_{\mathcal{F}^{p+1}(\omega)}\ll 1
\end{aligned}
$$

となる. さらに

$$
\begin{aligned}
\partial_{x_k}U(t,x)&=\frac{-1}{4\pi}\int_{\mathbf{R}^2}\frac{(x_1',x_2',f(t,x)-f(t,x-x'))\times\Omega(t,x-x')}{((x_1')^2+(x_2')^2+(f(t,x)-f(t,x-x'))^2)^{3/2}}dx_1'dx_2'\\
&=\frac{3}{4\pi}\int_{\mathbf{R}^2}\frac{(f(t,x)-f(t,x-x'))(f_{x_k}(t,x)-f_{x_k}(t,x-x'))}{((x_1')^2+(x_2')^2+(f(t,x)-f(t,x-x'))^2)^{5/2}}\\
&\quad\cdot(x_1',x_2',f(t,x)-f(t,x-x'))\times\Omega(t,x_1-x_1',x_2-x_2')dx_1'dx_2'\\
&\quad+\frac{-1}{4\pi}\int_{\mathbf{R}^2}\frac{(0,0,f_{x_k}(t,x)-f_{x_k}(t,x-x'))\times\Omega(t,x_1-x_1',x_2-x_2')}{((x_1')^2+(x_2')^2+(f(t,x)-f(t,x-x'))^2)^{3/2}}dx_1'dx_2'\\
&\quad+\frac{-1}{4\pi}\int_{\mathbf{R}^2}\frac{(x_1',x_2',f(t,x)-f(t,x-x'))\times\Omega_{x_k}(t,x_1-x_1',x_2-x_2')}{((x_1')^2+(x_2')^2+(f(t,x)-f(t,x-x'))^2)^{3/2}}dx_1'dx_2'
\end{aligned}
$$

となる. ここで $\Omega_3=f_{x_1}\Omega_1+f_{x_2}\Omega_2$ に注意し, また低階項や高次の微小量を無視すると

$\Omega_3 \sim f_{x_1}$，$\Omega_{3,x_k} \sim f_{x_1 x_k}$ などとなり，

$$\partial_{x_k} U(t,x) \sim \frac{-1}{4\pi} \int_{\mathbf{R}^2} |x'|^{-3} \; {}^t\begin{pmatrix} x_2' f_{x_1 x_k}(t, x-x') \\ f_{x_k}(t,x) - f_{x_k}(t,x-x') - x_1' f_{x_1 x_k}(t,x-x') \\ -x_1' \Omega_{2,x_k}(t,x-x'), +x_2' \Omega_{1,x_k}(t,x-x') \end{pmatrix} dx_1' dx_2'$$

$$\sim \frac{-1}{4\pi} \int_{\mathbf{R}^2} |x'|^{-3} \; {}^t\begin{pmatrix} x_2' f_{x_1 x_k}(t, x-x') \\ x_2' f_{x_2 x_k}(t,x-x') \\ -x_1' \Omega_{2,x_k}(t,x-x'), +x_2' \Omega_{1,x_k}(t,x-x') \end{pmatrix} dx_1' dx_2'$$

$$= \frac{-1}{2} \; {}^t\begin{pmatrix} -(-\Delta)^{-3/2} f_{0,x_1 x_2 x_k} \\ -(-\Delta)^{-3/2} f_{0,x_2 x_2 x_k} \\ (-\Delta)^{-1/2} f_{2,x_k} \end{pmatrix}$$

となる．同様に

$$\partial_{x_k}^2 U(t,x) \sim \frac{-1}{2} \; {}^t\begin{pmatrix} -(-\Delta)^{-3/2} f_{0,x_1 x_2 x_k x_k} \\ -(-\Delta)^{-3/2} f_{0,x_2 x_2 x_k x_k} \\ (-\Delta)^{-1/2} f_{2,x_k x_k} \end{pmatrix},$$

$$\Delta U(t,x) \sim \frac{-1}{2} \; {}^t\begin{pmatrix} (-\Delta)^{-1/2} f_{0,x_1 x_2} \\ (-\Delta)^{-1/2} f_{0,x_2 x_2} \\ -(-\Delta)^{1/2} f_2 \end{pmatrix}$$

となる．そこで (3.2), (3.3), (3.4) を

$$f_{0,t} + U_1 f_{0,x_1} + U_2 f_{0,x_2} \sim -(-\Delta)^{1/2} f_2/2,$$
$$f_{1,t} + U_1 f_{1,x_1} + U_2 f_{1,x_2} \sim 0,$$
$$f_{2,t} + U_1 f_{2,x_1} + U_2 f_{2,x_2} \sim -(-\Delta)^{1/2} \partial_{x_2}^2 f_0/2,$$

または $f_2^{\pm} = f_2 \pm \sqrt{-1} A_2 f_0$ として

$$f_{2,t}^{\pm} + U_1 f_{2,x_1}^{\pm} + U_2 f_{2,x_2}^{\pm} \mp \sqrt{-1} f_{2,x_2}^{\pm}/2 \sim 0,$$
$$f_{1,t} + U_1 f_{1,x_1} + U_2 f_{1,x_2} \sim 0$$

となる．これは変数 t について双曲形ではないので，通常のコーシー問題は適切にはならない．未知関数 $f(t,x_1,x_2)$，$\Omega_1(t,x_1,x_2)$，$\Omega_2(t,x_1,x_2)$ の $t=0$ における初期値をすべて指定したいのなら，初期値が解析的であると仮定しなければならない (これについて [4] 参照)．また 2 次元の場合，未知関数のうち $f(t,x_2)$ の解析的ではない初期値だけを指定するなら，解が存在する ([1] 参照)．そこでそのような理論を 3 次元の場合に拡張することが期待される．

参考文献

[1] Duchon, J. and Robert, R., Global vortex sheet solutions of Euler equations in the plane, *J. Differential Equations* **73**, 1988, 215–224.

[2] 今井 功, 応用超関数論, サイエンス社, 1981.

[3] 野呂 祐樹, 流体力学の超関数的考察, 防衛大学校修士論文, 2009
`http://www.nda.ac.jp/cc/users/uchikosh/noro.dvi`

[4] Sulem, C., Sulem, P. L., Bardos, C. and Frisch, U., Finite time analyticity for the two and three dimensional Kelvin-Helmholtz instability, *Comm. Math. Phys.* **80** (4), 1981, 485–516.

[5] Schaptra, P., Hyperfonctions et problemes aux limites elliptiques, *Bull. Soc. Math. France* **99**, 1971, 113–141.